Παραδείγματα:

1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$

Είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε πως υπάρχει $M>0$ ώστε

$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|\ \forall x,y\in[0,1]$.

Εφαρμόζοντας για $x=\frac{1}{n}$, $y=0$ (για κάθε $n\in\mathbb{N}$)

Προκύπτει:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{0}\right|\leq M\left|\frac{1}{n}-0\right|\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\leq M\cdot\frac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\leq M\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow n\leq M^2\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ άτοπο από την αρχιμήδεια ιδιότητα

Επομένως, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

2) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Έχουμε $\forall x\in[1,+\infty):\ |f'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2}$

Επομένως, αποδείξαμε πως η f έχει φραγμένη παράγωγο.

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3) $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$.

Θα δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής με τον ε-δ ορισμό.

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον η f συνεχής στο $[0,1]$, $\exists \delta_1>0$ ώστε $\forall x,y\in[0,1]$

με $|x-y|<\delta_1$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$ (I)

Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$,

$\exists \delta_2>0$ $\forall x,y\in[1,+\infty)$ με $|x-y|<\delta_2$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$ (II)

Θέτω $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$

Θεωρούμε τυχαία x,y στο $[0,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$

α) Αν $x,y\in[0,1]$: $|x-y|<\delta\leq\delta_1$

Από την (I) έχουμε: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$

β) Αν $x,y\in[1,+\infty)$: $|x-y|<\delta\leq\delta_2$

Από την (II) έχουμε : $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

γ) Αν $x\in[0,1]$ και $y\in[1,+\infty)$: $x\leq 1\leq y$

Τότε, εφόσον $y-x=|x-y|<\delta$

Θα έχουμε $|1-x|<\delta\leq\delta_1$

Από την (I) θα έχουμε : $|f(1)-f(x)|<\varepsilon/2$

Θα έχουμε $|y-1|<\delta\leq\delta_2$

Από την (II) θα έχουμε : $|f(y)-f(1)|<\varepsilon/2$

Έτσι : $|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(1)+f(1)-f(y)|\leq$

$\leq |f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)|=|f(1)-f(x)|+|f(y)-f(1)|<$

$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

δ) Αν $x\in[1,+\infty)$ και $y\in[0,1]$ ομοίως.

Άρα, σε κάθε περίπτωση $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Επομένως, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

4) $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 2, & x\in(1,2)\end{cases}$

Η f είναι συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $x_0\in(0,1)\cup(1,2)$

1η περίπτωση: $x_0\in(0,1)$

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=1-x_0>0$.

$\forall x\in(0,1)\cup(1,2)$ με $|x-x_0|<\delta$.

Θα ισχύει $x\in(0,1)$ και $|f(x)-f(x_0)|=|1-1|=0<\varepsilon$

2η περίπτωση: $x_0\in(1,2)$

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=x_0-1>0$

$\forall x\in(0,1)\cup(1,2)$ με $|x-x_0|<\delta$

Θα ισχύει $x\in(1,2)$ και $|f(x)-f(x_0)|=|2-2|=0<\varepsilon$.

Θα δείξουμε πως η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέτουμε $x_n=1+\frac{1}{2n}$ και $y_n=1-\frac{1}{2n}$.

Έχουμε $x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$

Ενώ $f(x_n)-f(y_n)=2-1=1\to 1\neq 0$.

Άρα, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Darboux

<u>Ορισμός</u>: Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Θα λέμε διαμέριση του $[a,b]$ οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a,b]$ που περιλαμβάνει τα a,b.

Γράφοντας τα στοιχεία του $[a,b]$ σε αύξουσα σειρά με $x_0, x_1, x_2, \ldots$ έχουμε: $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$

<u>Ορισμός</u>: Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ ονομάζουμε πλάτος της διαμέρισης και συμβολίζουμε με $\|P\|$ τον αριθμό $\|P\| = \max\{x_k - x_{k-1},\ k \in \{1,\ldots,n\}\} = \max\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$

Τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ $k = 1,\ldots,n$ (στα οποία χωρίζουμε το $[a,b]$) δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μήκος.

<u>Ορισμός</u>: Αν P, P' δυο διαμερίσεις του $[a,b]$, θα λέμε ότι η P' είναι εκλέπτυνση της P αν ισχύει $P \subseteq P'$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν P_1, P_2 δυο διαμερίσεις του $[a,b]$ και θέσουμε $P = P_1 \cup P_2$.

i) η P είναι διαμέριση του $[a,b]$

ii) η P είναι εκλέπτυνση και της P_1 και της P_2

Μάλιστα η P είναι η μικρότερη διαμέριση με αυτή την ιδιότητα.

[Δηλαδή, αν P' μια διαμέριση του $[a,b]$ και $P_1 \subseteq P'$ και $P_2 \subseteq P'$ τότε $P \subseteq P'$.]

▷ Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k = 1,\ldots,n$ θέτουμε

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$m_k = m_k(f, \mathcal{P})$

$M_k = M_k(f, \mathcal{P})$ και $m_k \leq M_k$

Σημείωση: Επειδή η f φραγμένη, το σύνολο $\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ είναι μη κενό και φραγμένο άρα έχει supremum και infimum στο $\mathbb{R}$.

Για $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\mathcal{P}$ διαμέριση του $[a, b]$. Αν m_k, M_k όπως ορίστηκαν παραπάνω, θέτουμε:

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

που ονομάζεται άνω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

και $$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

που ονομάζεται κάτω άθροισμα της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Από τον ορισμό, έπεται άμεσα, ότι για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ ισχύει: $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$

Λήμμα: Έστω $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και $x_{k-1} < y < x_k$.

Θέτουμε $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < y < x_k < \ldots < x_n = b\}$

Τότε: $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P})$

Από τα προηγούμενα, η μεσαία ανισότητα ισχύει πάντα.

Θέτουμε $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ για $i = 1, \ldots, n$

Θέτουμε $m_k' = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, y]\}$

$m_k'' = \inf\{f(x) : x \in [y, x_k]\}$

$M_k' = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, y]\}$

$M_k'' = \sup\{f(x) : x \in [y, x_k]\}$

(*) <u>Υπενθύμιση</u>: Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένα με $A \subseteq B$

Τότε: $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$

Με βάση το παραπάνω, προκύπτει: $m_k \le m_k'$ και $m_k \le m_k''$

και: $M_k' \le M_k$ και $M_k'' \le M_k$

$$L(f,P') = m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k'(y-x_{k-1})+m_k''(x_k-y)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1})$$
$$\ge m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k(y-x_{k-1})+m_k(x_k-y)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1}) =$$
$$= m_1(x_1-x_0)+\dots+m_k(x_k-x_{k-1})+\dots+m_n(x_n-x_{n-1}) = L(f,P)$$

$$U(f,P') = M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k'(y-x_{k-1})+M_k''(x_k-y)+\dots+M_n(x_n-x_{n-1})$$
$$\le M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k(y-x_{k-1})+M_k(x_k-y)+\dots+M_n(x_n-x_{n-1}) =$$
$$= M_1(x_1-x_0)+\dots+M_k(x_k-x_{k-1})+\dots+M_n(x_n-x_{n-1}) = U(f,P)$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε: $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$.

<u>Απόδειξη</u>:

Θεωρούμε $P = P_1 \cup P_2$ την κοινή τους εκλέπτυνση των P_1, P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος στοιχείων. Εφαρμόζοντας πεπερασμένες φορές το παραπάνω λήμμα (μια για κάθε νέο στοιχείο), προκύπτει: $L(f,P_1) \le L(f,P)$

Ομοίως, πάλι από το προηγούμενο λήμμα (εφαρμόζοντάς το τόσες φορές όσες τα στοιχεία του $P - P_2$), προκύπτει: $U(f,P) \le U(f,P_2)$

Επειδή $L(f,P) \le U(f,P)$ έχουμε:

$$L(f,P_1) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,P_2)$$

(*)(*) <u>Υπενθύμιση</u>: Αν A, B υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$, τότε: $\sup A \le \inf B$.

Ορισμός: Ορίζουμε το κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Ορίζουμε το άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Εφόσον $L(f,P) \leq U(f,P)$ για οποιαδήποτε διαμέριση του $[a,b]$.

από την ⊛⊛ έχουμε : $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Ορισμός: Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>Riemann Ολοκληρώσιμη</u> αν $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Στην περίπτωση αυτή, η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$ θα λέγεται: <u>Ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$</u> και θα συμβολίζεται $\int_a^b f(x)dx$

<u>Θεώρημα:</u> (Κριτήριο Riemann)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε:

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

<u>Απόδειξη:</u>

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$

θα υπάρχει P_1 διαμέριση του $[a,b]$ με $L(f,P_1) > \int_a^b f(x)dx - \varepsilon/2$.

Δηλαδή, $\int_a^b f(x)dx < L(f,P_1) - \varepsilon/2$.

Εφόσον $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$.

υπάρχει P_2 διαμέριση του $[a,b]$ με $U(f,P_2) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon/2$

Δηλαδή, $\int_a^b f(x)\,dx > U(f,P_2) - \varepsilon/2$.

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$

$$U(f,P) - \varepsilon/2 \le U(f,P_2) - \varepsilon/2 < \int_a^b f(x)\,dx < L(f,P_1) - \varepsilon/2 \le$$

$$\le L(f,P) - \varepsilon/2 \Rightarrow U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$